DOI:10.13374/j.issn1001-053x.1957.00.009

單位圓内解析有界函數邊界值的特性

王 鴻 昇

（數學教研組）

关于 A, D, H_δ 三类函数的边界值特性，在書〔2〕(ГЛ. Ⅱ, П.8) 中，均已談过，本文的目的是借助于 Г. Ц. Тумаркин 的論文〔1〕，引出与 B 类函数边界值有关的另一定理。（單位圓域内的有界解析函数类，簡称B类函数）。

定理：設 $\varphi(e^{i\theta})$ 是圓周 $|z|=1$ 的点集 E 上的可測函数。$f(z)$ 属于B类函数。則 $\varphi(e^{i\theta})$ 在 E 上几乎处处和 $f(z)$ 的角形边界值 $f(e^{i\theta})$ 相同的充分且必要条件，是有这样的多項式存在，滿足

Ⅰ. $\{p_n(z)\}$ 在圓 $|z|<1$ 内均匀收斂于有界函数 $f(z)$.

Ⅱ. $\{|p_n(e^{i\theta})|\}$ 在E上度量收斂于 $|f(e^{i\theta})|$.

Ⅲ. $\{p_n(e^{i\theta})\}$ 在E上度量收斂于 $\varphi(e^{i\theta})$.

証明其必要性：設有数的序列 $\{r_n\}$, $0<r_n<1$, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n=1$。我們考虑函数序列 $\{F_n(z)=f(r_n z)\}$。因为当 $|z|\leq 1$ 时，函数 $F_n(z)$ 是解析的，所以由魯格(рунге)定理可得到多項式 $p_n(z)$，当 $|z|\leq 1$ 时，$|F_n(z)-p_n(z)|<\varepsilon_n$，其中 $\varepsilon_n>0$ 並且当 $n\to\infty$ 时，$\varepsilon_n\to 0$。因为 $F_n(e^{i\theta})=f(r_n e^{i\theta})$, $F_n(re^{i\theta})=f(r_n re^{i\theta})$, $0\leq r\leq 1$,

所以
$$\int_0^{2\pi} \ln^+|F_n(re^{i\theta})|\,d\theta=\int_0^{2\pi}\ln^+|f(r_n re^{i\theta})|\,d\theta<c$$

並且
$$F_n(e^{i\theta}) \text{ 几乎处处收斂于 } f(e^{i\theta}).$$

故由 А. Я. Хинчин 与 А. Островский 定理，知条件Ⅰ成立。因为 $F_n(e^{i\theta})$ 几乎处处收斂于 $f(e^{i\theta})$，所以 $\{p_n(e^{i\theta})\}$ 亦几乎处处收斂于 $f(e^{i\theta})$，由此推出 $\{p_n(e^{i\theta})\}$ 在 E 上度量收斂于 $f(e^{i\theta})$，因而 $\{|p_n(e^{i\theta})|\}$ 在E上亦度量收斂于 $|f(e^{i\theta})|$。于是得到定理的条件Ⅱ。又因为由假定 $f(e^{i\theta})$ 与 $\varphi(e^{i\theta})$ 在E上几乎处处相同，所以 $\{p_n(z)\}$ 在 E 上亦度量收斂于 $\varphi(e^{i\theta})$。于是得到定理的条件Ⅲ。

証明其充分性：由条件Ⅰ，知

$$\{p_n(z)\} \text{ 在 } |z|<1 \text{ 内是均匀有界的。} \tag{1}$$

所以由 С. Я. Хавинсон 定理〔2〕: ГЛ. Ⅱ, П.14 2)，对任何可求和函数 $\omega(\theta)$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} p_n(e^{i\theta})\omega(\theta)\,d\theta=\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\omega(\theta)\,d\theta \tag{2}$$

现在我們可以假定 $f(e^{i\theta})$在E上几乎处处$\neq 0$，因为若相反的話，由唯一性定理，得到$f(z)\equiv 0$。因而我們的定理是明显的。由此，我們对于任一給定的ε，可找到集$E_1 \subset E$，$mE_1 > mE-\varepsilon$，

使
$$|f(e^{i\theta})| > \lambda, \qquad \text{当}\ \theta \in E_1, \tag{3}$$
其中λ是>0的数。

設
$$\omega(\theta)=[f(e^{i\theta})]^{-1} \qquad \text{当}\ \theta\in E_1,$$
$$\omega(\theta)=0 \qquad \text{当}\ \theta\in CE_1.$$

由（2）知
$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_1} p_n(e^{i\theta})[f(e^{i\theta})]^{-1}d\theta = mE_1 \tag{4}$$

由（1），（3）和Ⅱ，知$\{|p_n(e^{i\theta})[f(e^{i\theta})]^{-1}|\}$在$E_1$上均匀有界，並且在$E_1$上度量收斂于1。

于是由（4）知$\{p_n(e^{i\theta})[f(e^{i\theta})]^{-1}\}$在$E_1$上亦度量收斂于1，因而得到$\{p_n(e^{i\theta})\}$在$E_1$上度量收斂于$f(e^{i\theta})$。但$\varepsilon$是任意的，所以$\{p_n(e^{i\theta})\}$在E上亦度量收斂于$f(e^{i\theta})$。

再由条件Ⅲ，看出，在E上几乎处处$f(e^{i\theta})$与$\varphi(e^{i\theta})$相同。因此定理的証明完毕。

参 考 文 献

1. Г. Ц. Тумаркин: Условия сходимости граничных значений последовательности аналитических функций, использующие сходимость модулей. ДАН, 98, №5 (1954).

2. И. И. Привалов: Граничные свойства аналитических функций. 1950（有中文譯本）